

Ebene geradlinige Darstellungen der platonischen Graphen mit wenigen verschiedenen Kantenlängen

Harborth, Heiko
Möller, Meinhard

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 45, 1994,
S.7-20



Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Ebene geradlinige Darstellungen der platonischen Graphen mit wenigen verschiedenen Kantenlängen

Von **Heiko Harborth** und **Meinhard Möller***, Braunschweig

(Eingegangen am 17. 8. 1994)

Herrn Professor Dr. Hans-Joachim-Kanold zum achtzigsten Geburtstag

1. Einleitung

Die fünf platonischen Körper sind seit dem Altertum immer wieder von Interesse in Kunst, Naturwissenschaft und Mathematik. Hier sollen die platonischen Graphen T (Tetraeder), H (Würfel = Hexaeder), O (Oktaeder), D (Dodekaeder) und I (Ikosaeder) betrachtet werden, deren Knoten den Eckpunkten und deren Kanten den Körper entsprechen. Natürlich lassen sich diese Graphen im dreidimensionalen Raum \mathbb{R}^3 mit geradlinigen, gleichlangen Kanten realisieren. Wie sieht es aber mit Realisierungen in der Ebene \mathbb{R}^2 aus?

Bei einer Darstellung $D(G)$ eines Graphen G werden den Knoten verschiedene Punkte im \mathbb{R}^2 (auch Knoten von $D(G)$ genannt) und den Kanten die entsprechenden Verbindungsstrecken (auch Kanten von $D(G)$ genannt) so zugeordnet, daß zwei Kanten höchstens einen Punkt gemeinsam haben, entweder einen Knoten oder einen Kreuzungspunkt. Durch kleine Verschiebungen der Knotenpunkte läßt es sich immer vermeiden, daß Knoten innere Punkte von Kanten sind oder daß zwei Kanten eine Strecke gemeinsam haben. Für planare Graphen wird eine Darstellung ohne Kantenkreuzungen mit $D_p(G)$ bezeichnet. Die Existenz von $D_p(G)$ folgt aus einem Ergebnis von K. Wagner aus den dreißiger Jahren (siehe etwa [6]). Zwei Darstellungen $D(G)$ oder $D_p(G)$ eines Graphen G werden als isomorph betrachtet, wenn sich die Längen der sich entsprechenden Kanten höchstens um einen für alle Kanten gleichen Faktor unterscheiden, wenn sie also bis auf Ähnlichkeit gleich sind. Darstellungen mit nur rationalen Kantenlängen werden mit $D(G,r)$ oder $D_p(G,r)$ bezeichnet. Deren Existenz ist für $D(G,r)$ gesichert (siehe etwa [4]) und für $D_p(G,r)$ allgemein nur vermutet (siehe etwa [3]). Für die fünf platonischen Graphen aber ist die Existenz in [2] nachgewiesen.

Hier soll nun nach den kleinsten Anzahlen $A(G)$, $A(G,r)$, $A_p(G)$ und $A_p(G,r)$ von verschiedenen Kantenlängen unter allen möglichen Darstellungen $D(G)$, $D(G,r)$, $D_p(G)$ und $D_p(G,r)$ für die fünf platonischen Graphen G gefragt werden (siehe auch [5]). Die Ergebnisse sind in Tabelle 1 zusammengestellt.

Zur Bestimmung einiger Werte von Tabelle 1 werden für $n = 5$ und $n = 6$ alle nicht-isomorphen $D(W_n)$ mit nur zwei verschiedenen Kantenlängen konstruiert, wobei W_n die Räder mit $n-1$ Speichen bedeuten, das heißt, ein Knoten ist mit allen $n-1$ Knoten eines geschlossenen Polygonzuges aus $n-1$ Kanten verbunden. Es ergeben sich 266 nichtisomorphe $D(W_6)$ und für W_5 außer 26 nichtisomorphen $D(W_5)$ noch 6 von einem Parameter abhängige unendliche Klassen von nichtisomorphen $D(W_5)$. Daß es 6 nichtisomorphe $D(W_4)$ gibt, wurde schon in [1] bewiesen (siehe Figur 2).

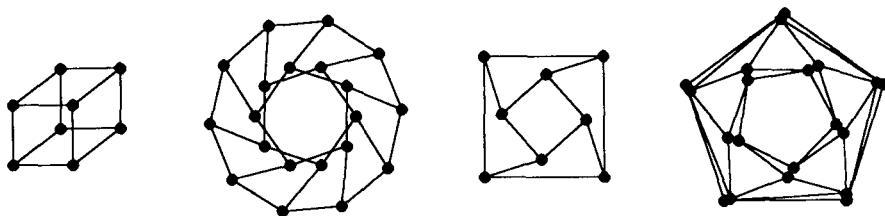
* Prof. Dr. H. Harborth, Dr. M. Möller · Diskrete Mathematik · Technische Universität Braunschweig · Pockelsstraße 14 · D-38106 Braunschweig.

| $\begin{smallmatrix} \diagup \\ \diagdown \end{smallmatrix} A$ | $A(G)$ | $A(G,r)$ | $A_p(G)$ | $A_p(G,r)$ |
|--|--------|----------|----------|------------|
| T | 2 | 3 | 2 | 3 |
| H | 1 | 1 | 2 | 2 |
| O | 2 | 3 | 3 | 3 |
| D | 1 | 1 | 2 | 2 |
| I | 3 | 3 | 4 | ≤ 7 |

Tabelle 1

2. Würfel und Dodekaeder

Die Graphen H und D sind die beiden platonischen Graphen, die als planare Graphen keine Triangulationen der Ebene sind, das heißt, sie haben gewissermaßen noch etwas Beweglichkeit. Mit Überkreuzungen lassen sie sich wie in Figur 1 mit Einheitskanten darstellen, so daß $A(G) = A(G,r) = 1$ für $G = H$ und $G = D$. Daß $D_p(H)$ und $D_p(D)$ mindestens zwei verschiedene Kantenlängen erfordern, läßt sich etwa wie in [2] beweisen. Nach Figur 1 sind aber Darstellungen $D_p(G)$ mit Kantenlängen 1 und 2 möglich, so daß $A_p(G) = A_p(G,r) = 2$ für $G = H$ und $G = D$ folgen.



Figur 1

Darstellungen $D(H,r)$, $D(O,r)$ mit Kantenlängen 1 und $D_p(H,r)$, $D_p(O,r)$ mit Kantenlängen 1 und 2.

3. Tetraeder

Vier Punkte mit allen sechs Abständen von gleicher Länge sind in der Ebene nicht möglich, da etwa der Mittelpunkt eines gleichseitigen Dreiecks der einzige Punkt ist, der zu den drei Eckpunkten äquidistant ist. Beispiele aus Figur 2 beweisen dann $A(T) = 2$ und auch $A_p(T) = 2$.

1.4142 : 1.618 : 1.732 :

1.9318 :



1



2



3



4



5



6

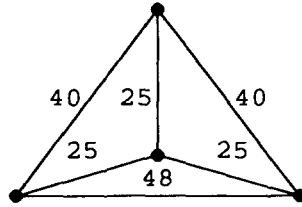
Figur 2

Alle Möglichkeiten von vier Punkten mit zwei Abständen.

Nach [1] gibt es genau die sechs Möglichkeiten von Figur 2 für vier Punkte im \mathbb{R}^2 mit nur zwei verschiedenen Abständen. Da hier außer dem kleinsten Abstand 1 nur die Abstände $\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ vorkommen, gelten $A(T, r) \geq 3$ und $A_p(T, r) \geq 3$. Die Gleichheit ergibt sich durch die Darstellung in Figur 3.

Figur 3

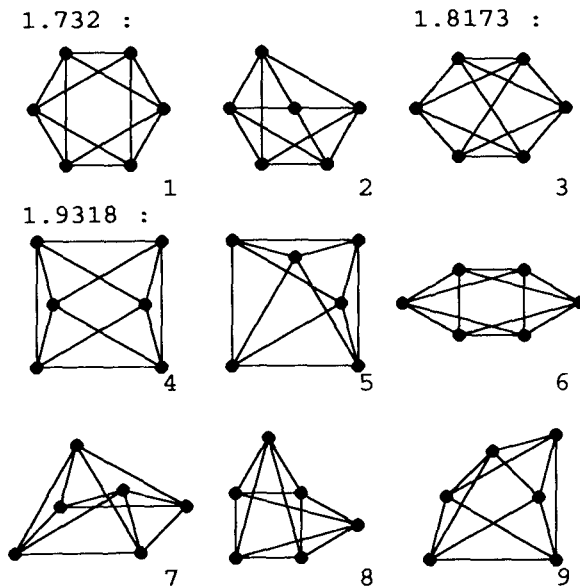
Darstellung $D_p(T, r)$ mit drei ganzzahligen Kantenlängen.



4. Oktaeder

Mit nur einer Kantenlänge existiert $D(O)$ nicht, da dann schon $D(W_5)$ als gleichseitiges Kreisviereck mit dem Radius als Seitenlänge möglich sein müßte. Aus den Beispielen in Figur 4 ergibt sich $A(O) = 2$.

Satz 1. Für das Oktaeder gibt es mit zwei verschiedenen Kantenlängen nur die 9 nicht-isomorphen $D(O)$ in Figur 4.

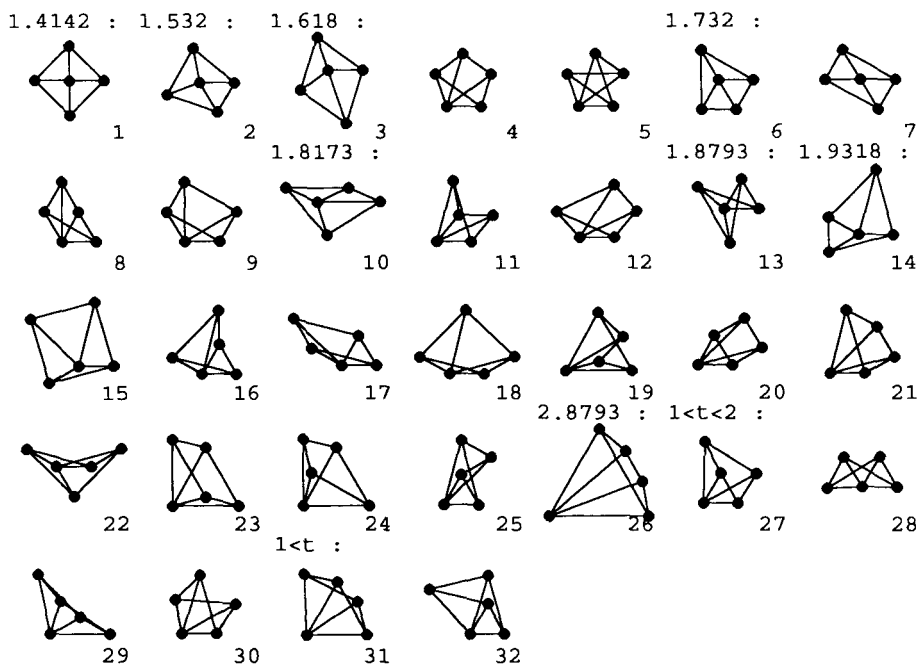


Figur 4

Alle neun Darstellungen $D(O, r)$ mit zwei Kantenlängen.

Zum Beweis werden zunächst alle nichtisomorphen $D(W_5)$ mit nur zwei Kantenlängen konstruiert.

Satz 2. Für das Rad W_5 mit vier Speichen gibt es mit zwei verschiedenen Kantenlängen nur die 26 nichtisomorphen $D(W_5)$ und die 6 von einem Parameter t abhängigen unendlichen Klassen von nichtisomorphen $D(W_5)$ in Figur 5.



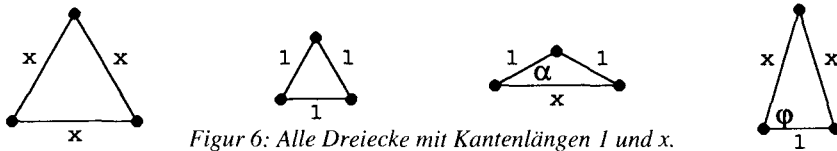
Figur 5: Alle 26+6 Darstellungen $D(W_5)$ mit zwei Kantenlängen.

Beweis von Satz 2. Für die vier Dreiecke des W_5 kommen nur die Dreiecke mit Seitenlängen l oder x mit $x > l$ aus Figur 6 in Betracht. Für die vier Winkel ω_i , $1 \leq i \leq 4$, deren Scheitelpunkt der Knoten vom Grad 4 ist, stehen also nur $\frac{\pi}{3}$, α , $\pi - 2\alpha$, φ und $\pi - 2\varphi$ mit den Einschränkungen

$$(1) \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{3} < \varphi < \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad 0 < \pi - 2\varphi < \frac{\pi}{3} < \pi - 2\alpha < \pi$$

zur Verfügung. Die Orientierungen der ω_i können immer so gewählt werden, daß als Winkelsummen nur 0 und 2π vorkommen. Als Summe ergibt sich jeweils nur 2π , wenn kein Winkel ω_i , entweder 0 oder 2π , wenn genau ein Winkel ω_i , und nur 0, wenn genau zwei Winkel ω_i in umgekehrter Richtung orientiert sind ($-\omega_i$). Werden nun alle Möglichkeiten bestimmt, die Winkelsummen 0 oder 2π aus den Winkeln α , $\pi - 2\varphi$, $\frac{\pi}{3}$, φ und $\pi - 2\alpha$ zu erhalten, so können einschränkend die folgenden Bedingungen benutzt werden.

(2) Die Anzahl der vorkommenden Winkel α und φ für ω_i muß insgesamt eine gerade Zahl sein, da die Schenkel dieser Winkel verschieden lang sind und vier Dreiecke zusammengefügt werden.



Figur 6: Alle Dreiecke mit Kantenlängen 1 und x.

(3) Zwei entgegengesetzt orientierte gleiche Winkel ω_i dürfen im Rad nicht unmittelbar aufeinanderfolgen.

(4) Kommen für ω_i sowohl $\pi - 2\alpha$ als auch $\pi - 2\varphi$ vor, so muß wegen der zu wechselnden Schenkellängen mindestens ein Winkel α oder φ für ω_i vorkommen. Wegen (2) können dann außer $\pi - 2\alpha$ und $\pi - 2\varphi$ die beiden anderen Winkel ω_i nur α oder φ sein.

In Tabelle 2 sind alle möglichen Vielfachheiten der ω_i aufgeführt, wenn mit den Einschränkungen (1) bis (4) alle ω_i gleichgerichtet sind, die Summe also 2π sein muß. In der sechsten Spalte sind die speziellen Bedingungen für α und φ angegeben, die sich aus der Winkelsumme ($= 2\pi$) ergeben. Dann wird der Kosinus beider Seiten dieser Bedingungen jeweils in Terme mit Potenzen von $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ umgeformt. Mit den Beziehungen

$$(5) \quad \cos \alpha = \frac{x}{2}, \sin \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{4-x^2}, \cos \varphi = \frac{1}{2x}, \sin \varphi = \frac{1}{2x} \sqrt{4x^2-1}$$

aus den Dreiecken in Figur 6, die eine allgemeine Bedingung für α und φ festlegen, ergeben sich Polynome in x, die in Tabelle 5 zusammengestellt sind. Alle Nullstellen mit $x > 1$ oder, falls α vorkommt, mit $1 < x < 2$ wegen der Dreiecksungleichung, bestimmen alle möglichen Werte für α und φ . Wenn diese Werte auch die spezielle Bedingung für α und φ erfüllen (siehe letzte Spalte von Tabelle 5), so ergeben sich durch alle Kombinationen der Winkel die Lösungen in Figur 5, deren Nummern in der letzten Spalte von Tabelle 2 angegeben sind.

In Tabelle 3 werden wie in Tabelle 2 die Fälle mit einem umgekehrt gerichteten Winkel ω_i zusammengestellt. Dabei sind die Winkelsummen für die ersten beiden Zeilen 2π und weiterhin 0, und a (-) bedeutet, daß a entsprechende Winkel umgekehrt gerichtet sind.

Für zwei umgekehrt gerichtete Winkel ω_i , also mit der Winkelsumme 0, ergibt sich entsprechend Tabelle 4.

Damit ist Satz 2 bewiesen.

| α | $\pi-2\varphi$ | $\pi/3$ | φ | $\pi-2\alpha$ | | x | |
|----------|----------------|---------|-----------|---------------|-------------------------------|---------------------------|--------|
| | | | | 4 | $\alpha = (1/4)\pi$ | $\sqrt{2}$ | 1 |
| | | 1 | | 3 | $\alpha = (2/9)\pi$ | 1,532... | 2 |
| 1 | | | 1 | 2 | $\varphi = 3\alpha$ | $(\sqrt{6+2\sqrt{13}})/2$ | 10 |
| | | | 2 | 2 | $\varphi = 2\alpha$ | $(1+\sqrt{5})/2$ | 3 |
| | | 2 | | 2 | $\alpha = (1/6)\pi$ | $\sqrt{3}$ | 6, 7 |
| | | 1 | 2 | 1 | $\varphi = (1/3)\pi + \alpha$ | $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ | 14, 15 |

Tabelle 2

| α | $\pi-2\varphi$ | $\pi/3$ | φ | $\pi-2\alpha$ | | x | |
|----------|----------------|---------|-----------|---------------|--------------------------------|---------------------------|------------|
| | | 1(-) | | 3 | $\alpha = (1/9)\pi$ | 1,879... | 13 |
| 1(-) | | | 1 | 2 | $\varphi = 5\alpha$ | $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ | 22 |
| | 3 | 1(-) | | | $\alpha = (4/9)\pi$ | 2,879... | 26 |
| 2 | 1 | 1(-) | | | $\varphi = (1/3)\pi + \alpha$ | $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ | 19, 20 |
| 3 | | | 1(-) | | $\varphi = 3\alpha$ | $(\sqrt{6+2\sqrt{13}})/2$ | 11 |
| 1 | 2 | | 1(-) | | $5\varphi = 2\pi + \alpha$ | $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ | 21 |
| 1 | 1 | 1 | 1(-) | | $3\varphi = (4/3)\pi + \alpha$ | - | - |
| 2 | 1 | | | 1(-) | $\varphi = 2\alpha$ | $(1+\sqrt{5})/2$ | 4 |
| 2 | | 1 | | 1(-) | $\alpha = (1/6)\pi$ | $\sqrt{3}$ | 8, 9 |
| 1 | 1 | | 1 | 1(-) | $\varphi = 3\alpha$ | $(\sqrt{6+2\sqrt{13}})/2$ | 12 |
| 1 | | 1 | 1 | 1(-) | $\varphi = (2/3)\pi - 3\alpha$ | $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ | 16, 17, 18 |

Tabelle 3

| α | $\pi-2\varphi$ | $\pi/3$ | φ | $\pi-2\alpha$ | | x | |
|----------|----------------|---------|-----------|---------------|--------------------------------|---------------------|------------|
| 1(-) | 1 | 1(-) | 1 | | $\varphi = (2/3)\pi - \alpha$ | - | - |
| 1(-) | 1 | 1 | 1(-) | | $3\varphi = (4/3)\pi - \alpha$ | $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ | 23, 24, 25 |
| 1(-) | 1 | | 1(-) | 1 | $\varphi = (2/3)\pi - \alpha$ | - | - |
| 1(-) | | 1 | 1(-) | 1 | $\varphi = (4/3)\pi - 3\alpha$ | $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ | - |
| 1(-) | | 1 | 1 | 1(-) | $\varphi = (2/3)\pi - \alpha$ | - | - |
| 1(-) | | | 1(-) | 2 | $\varphi = 2\pi - 5\alpha$ | $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ | - |
| | 1(-) | | 2 | 1(-) | $2\varphi = \pi - \alpha$ | $(1+\sqrt{5})/2$ | 5 |
| | | 1(-) | 2 | 1(-) | $\varphi = (2/3)\pi - \alpha$ | - | - |
| 1(-) | | 2 | 1(-) | | $\varphi = (2/3)\pi - \alpha$ | - | - |
| 1(-) | 2 | | 1(-) | | $5\varphi = 2\pi - \alpha$ | $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ | - |
| 2 | 1(-) | 1(-) | | | $\varphi = (2/3)\pi - \alpha$ | - | - |
| 2 | 1(-) | | | 1(-) | $\varphi = \pi - 2\alpha$ | - | - |
| 1 | | 1 | | | - | | 27 |
| 1(-) | | 1(-) | | | - | | 29, 30 |
| 1 | | | 1 | | - | | |
| 1(-) | | 1(-) | 1(-) | | - | | 31 |
| | 1 | 1 | | | - | | 32 |
| | | 1(-) | 1(-) | | - | | |
| | | 1 | | 1 | - | | 28 |
| | | 1(-) | | 1(-) | | | |

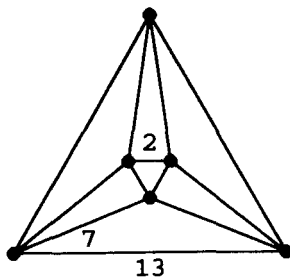
Tabelle 4

Beweis von Satz 1. Wird beachtet, daß zwei Kanten höchstens einen Punkt gemeinsam haben dürfen, so müssen für gleiche Werte von x die kongruenten Vierecke zweier Räder W_5 ohne ihren Knoten vom Grad 4 so zur Deckung gebracht werden, daß die Knoten vom Grad 4 nicht zusammenfallen, um eine Darstellung $D(O)$ zu ergeben. Dieses ist nur in den neun in Figur 4 angegebenen Fällen möglich. Damit ist Satz 1 bewiesen. Interessant sind die Darstellungen 7 und 9, die jeweils sechs verschiedene Räder W_5 enthalten.

| | | x | |
|--------------------------------|--|-----------------------------|---|
| $5\varphi = 2\pi + \alpha$ | $x^6 - 5x^4 + 5x^2 - 1 = (x^2 - 1)(x^4 - 4x^2 + 1)$ | $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ | = |
| $\varphi = 5\alpha$ | | | = |
| $\varphi = 2\pi - 5\alpha$ | | | ≠ |
| $5\varphi = 2\pi - \alpha$ | | | ≠ |
| $\varphi = (2/3)\pi - 3\alpha$ | $x^8 - 6x^6 + 10x^4 - 6x^2 + 1 = (x+1)^2(x-1)^2(x^4 - 4x^2 + 1)$ | $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ | = |
| $3\varphi = (4/3)\pi - \alpha$ | | | = |
| $3\varphi = (4/3)\pi + \alpha$ | | | ≠ |
| $\varphi = (4/3)\pi - 3\alpha$ | | | ≠ |
| $\varphi = 3\alpha$ | $x^4 - 3x^2 - 1$ | $(\sqrt{6 + 2\sqrt{13}})/2$ | = |
| $\varphi = 2\alpha$ | $x^3 - 2x - 1 = (x^2 - x - 1)(x + 1)$ | $(1 + \sqrt{5})/2$ | = |
| $2\varphi = \pi - \alpha$ | $x^3 - 2x^2 + 1 = (x^2 - x - 1)(x - 1)$ | $(1 + \sqrt{5})/2$ | = |
| $\varphi = \pi - 2\alpha$ | $x^3 - 2x + 1 = (x^2 + x - 1)(x - 1)$ | - | |
| $\varphi = (2/3)\pi - \alpha$ | $x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2$ | - | |
| $\varphi = (1/3)\pi + \alpha$ | $x^4 - 4x^2 + 1$ | $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ | = |
| $\varphi = (4/9)\pi$ | $x^3 - 3x^2 + 1$ | 2,8793... | = |
| $\alpha = (2/9)\pi$ | $x^3 - 3x + 1$ | 1,5320... | = |
| $\alpha = (1/9)\pi$ | $x^3 - 3x - 1$ | 1,8793... | = |
| $\alpha = (1/6)\pi$ | $x^3 - 3x = (x^2 - 3)x$ | $\sqrt{3}$ | = |
| $\alpha = (1/4)\pi$ | $x^4 - 4x^2 + 4 = (x^2 - 2)^2$ | $\sqrt{2}$ | = |

Tabelle 5

Da keiner der Werte x in Figur 4 rational ist $(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{6+2\sqrt{13}}, \sqrt{2+\sqrt{3}})$, folgt $A(O, r) \geq 3$ aus Satz 1. Etwa aus der planaren Darstellung $D_p(O)$ in Figur 7 folgen damit die Werte $A(O, r) = A_p(O) = A_p(O, r) = 3$ in Tabelle 1.



Figur 7

Darstellung $D_p(O, r)$ mit drei ganzzahligen Kantenlängen.

1.1755 :



1

1.2175 :



2

1.2309 :



3

1.2587 :



4

1.2855 :



6

1.2995 :



7



8



9

1.3065 :



10

1.3163 :



12

1.3371 :



13



14



15



16



17

1.3641 :



19



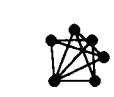
20



21



22



24

1.3833 :



25



26



27



28



29

1.4016 :



31



32



33



34



35

1.4142 :



37



38



39



40



41



43



44



45



46



47



49



50



51



52

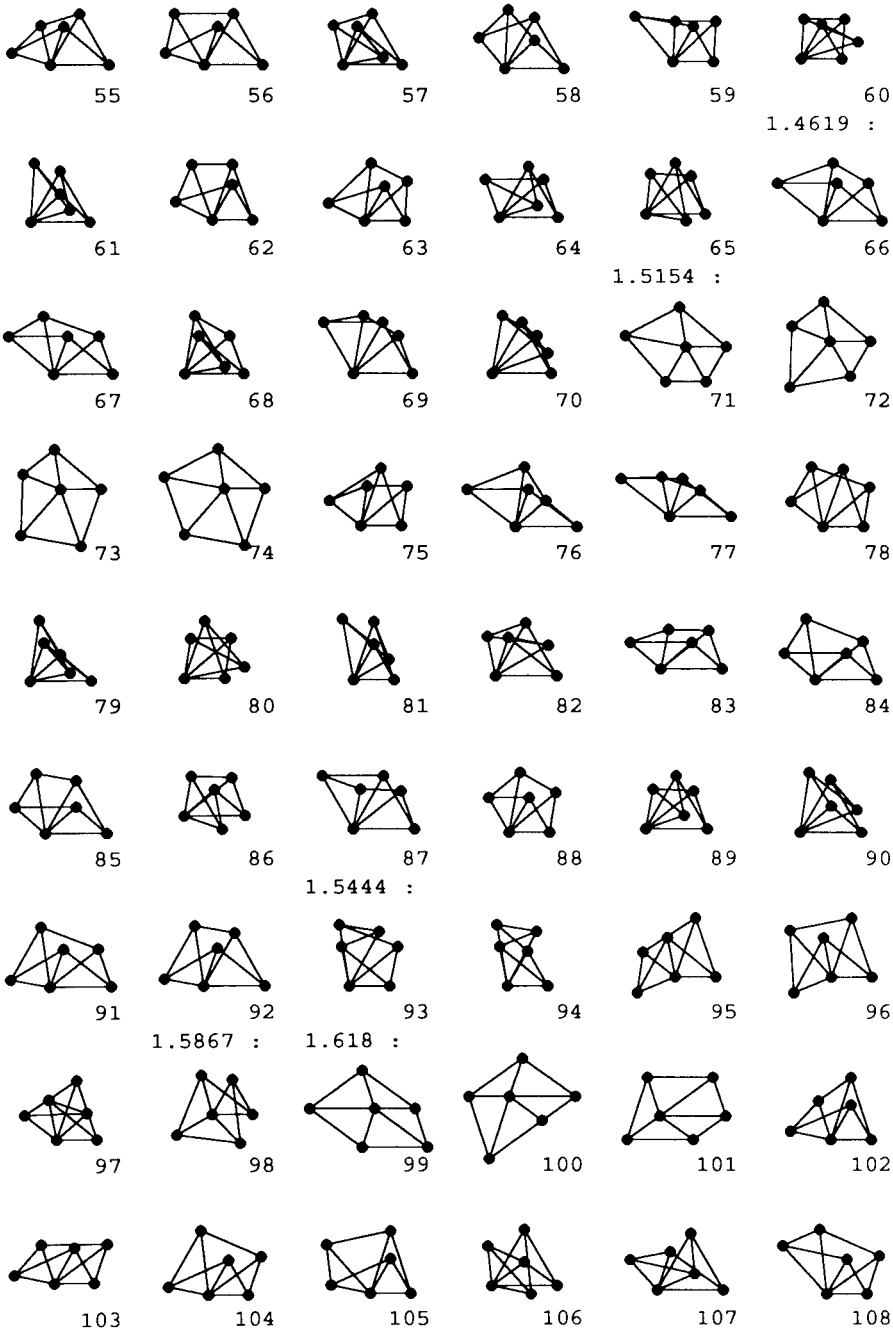


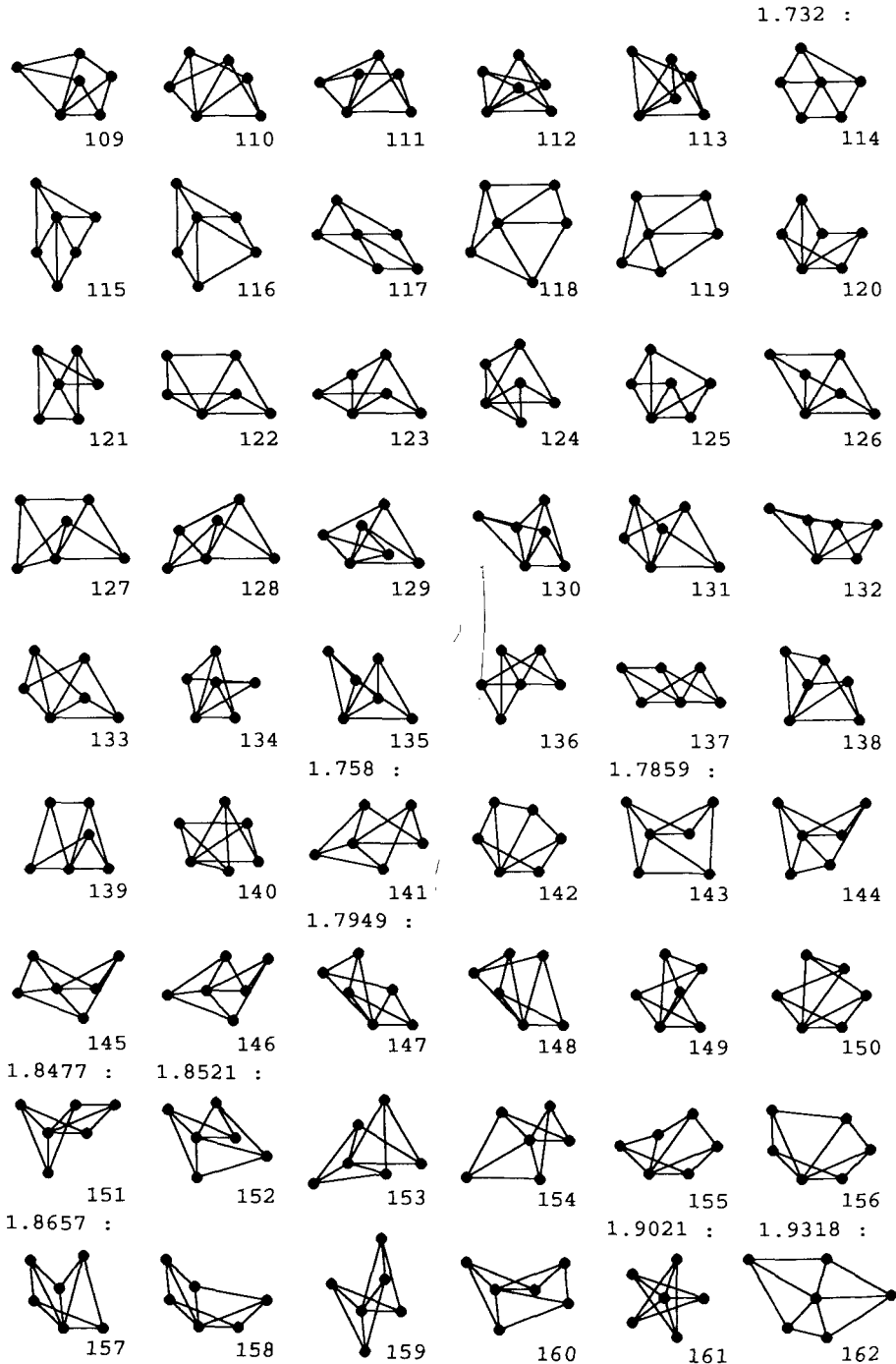
53

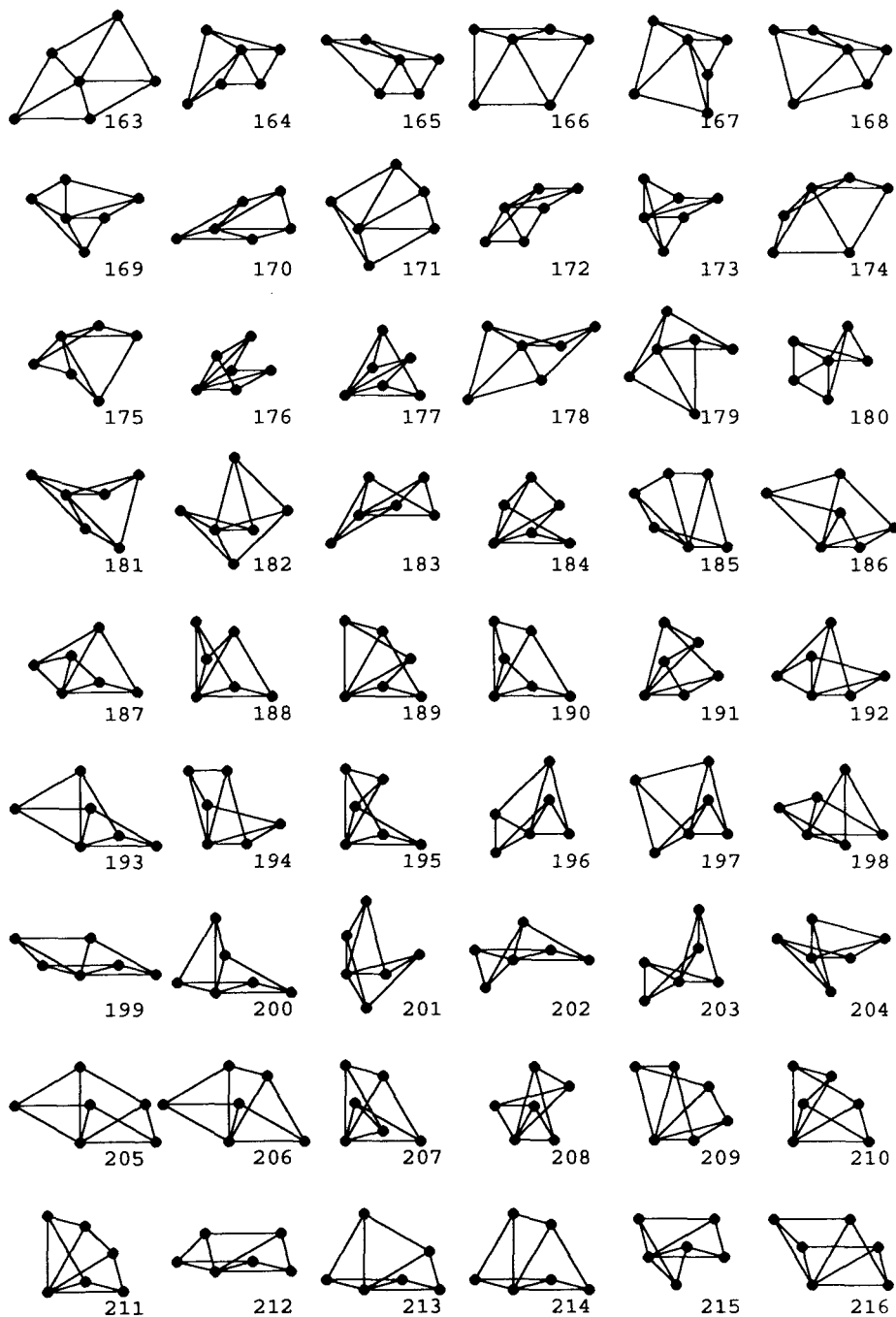
1.4554 :

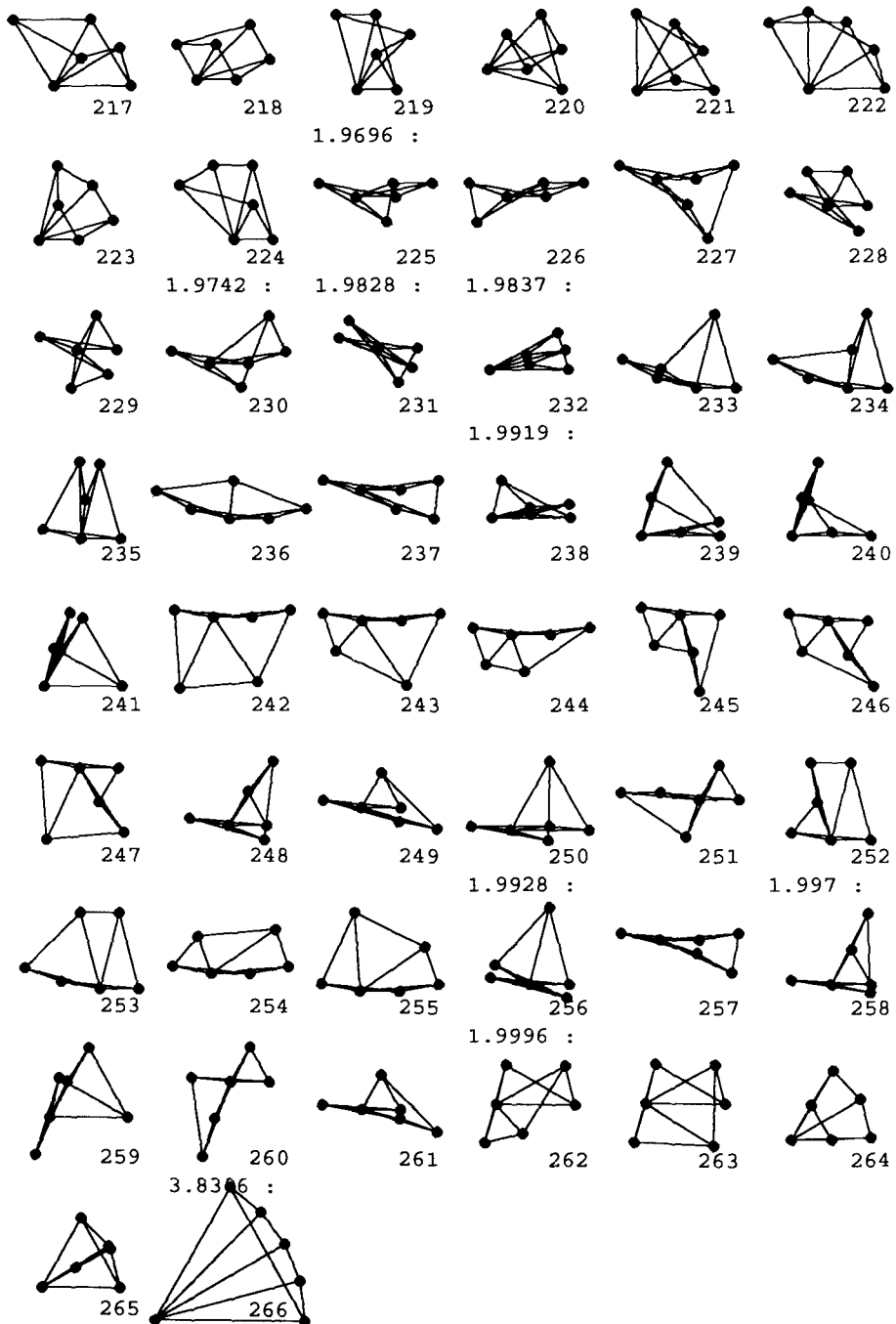


54









Figur 8:
Alle 266 Darstellungen $D(W_6)$ mit zwei Kantenlängen.

5. Ikosaeder

Die Diskussionen entsprechen denen für das Oktaeder, sind aber erheblich aufwendiger.

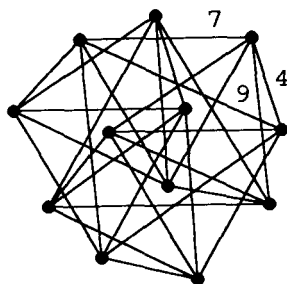
Satz 3. Für das Ikosaeder gibt es keine Darstellung $D(I)$ mit nur zwei verschiedenen Kantenlängen.

Zum Beweis werden zunächst alle nichtisomorphen $D(W_6)$ mit nur zwei Kantenlängen konstruiert (nur eine Kantenlänge ist unmöglich).

Satz 4. Für das Rad W_6 mit fünf Speichen gibt es mit zwei verschiedenen Kantenlängen nur die 266 nichtisomorphen $D(W_6)$ in Figur 8.

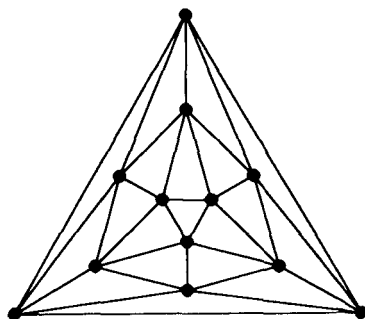
Die Beweise der Sätze 3 und 4 entsprechen denen der Sätze 1 und 2. Bei den umfangreichen Bestimmungen der Winkelaufteilungen, der Diskussionen von Polynomen und Kombinationen von Rädern wurde teilweise ein Computer benutzt. Die 266 Darstellungen $D(W_6)$ zerfallen in 37 Klassen mit gleichen Kantenlängen. Innerhalb keiner der Klassen lassen sich genügend $D(W_6)$ so kombinieren, daß sich ein $D(I)$ mit nur zwei Kantenlängen ergibt.

Für Tabelle 1 folgt aus Satz 3, daß $A(I, r) \geq A(I) > 2$ gilt. Mit Figur 9 aus [5] folgt dann $A(I, r) = A(I) = 3$.



Figur 9

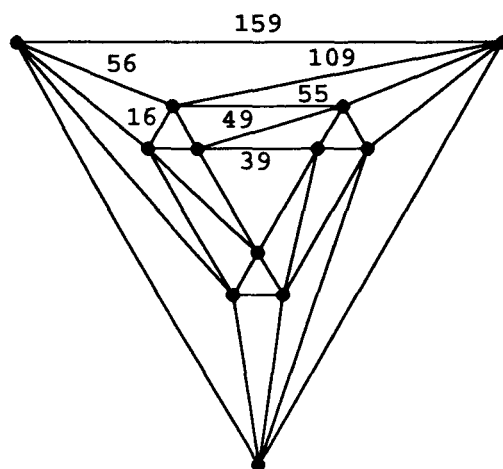
Darstellung $D(I, r)$ mit drei ganzzahligen Kantenlängen.



Figur 10

Darstellung $D_p(I)$ mit vier Kantenlängen.

In einer Darstellung $D_p(I)$ mit nur 3 Kantenlängen kommt die längste nur im äußeren Dreieck vor, so daß innerhalb des Dreiecks 6 planare Räder W_6 mit nur 2 Kantenlängen liegen müssen. Mit den planaren $D_p(W_6)$ aus Figur 8 ist jedoch keine Kombination innerhalb der Klassen möglich. Es gilt also $A_p(I) > 3$, und mit Figur 10 folgt $A_p(I) = 4$. Für $A_p(I, r)$ ist bisher nur $4 \geq A_p(I, r) \geq 7$ bekannt. Eine planare Darstellung mit nur 7 verschiedenen ganzzahligen Kantenlängen ist in Figur 11 angegeben (siehe auch [2]). Ob es planare Darstellungen mit nur 6, 5 oder gar nur 4 verschiedenen ganzzahligen Kantenlängen gibt, bleibt offen.



Figur 11

Darstellung $D_p(I, r)$ mit sieben ganzzahligen Kantenlängen.

Literaturverzeichnis

- [1] S.J. Einhorn und I.J. Schoenberg: On euclidean sets having only two distances between points. *Indag. Math.* **28** (1966), 479–504.
- [2] H. Harborth, A. Kemnitz, M. Möller und A. Süßenbach: Ganzzahlige planare Darstellungen der platonischen Körper. *Elem. Math.* **42** (1987), 118–122.
- [3] H. Harborth und A. Kemnitz: Integral representations of graphs. In: R. Bodendiek (ed.), *Contemporary Methods in Graph Theory*, BI-Wiss.-Verlag, Mannheim, Wien, Zürich 1990, 359–367.
- [4] H. Harborth, A. Kemnitz und M. Möller: An upper bound for the minimum diameter of integral point sets. *Discrete Comput. Geom.* **9** (1993), 427–432.
- [5] H. Harborth und M. Möller: Minimum integral drawings of the platonic solid graphs. *Math. Mag.* **67** (1994), 355–358.
- [6] K. Wagner: *Graphentheorie*. BI-Wiss.-Verlag, Mannheim 1970.